Краткие сообщения ОИЯИ № 1(58)-93 *JINR Rapid Communications № 1(58)-93*
УДК 519.6+517.98+517.3

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов, О.В.Зейналова, Р.Р.Шахбагян

В данной работе представлены результаты исследований в области теории и методов приближенного вычисления интегралов в функциональных пространствах, полученные авторами за последние несколько лет. Для континуальных интегралов квантовой статистической физики и квантовой теории поля построены новые аппроксимационные формулы, обладающие произвольной заданной степенью точности. По сравнению с существующими способами вычисления интегралов по траекториям данный подход имеет ряд преимуществ: возможность проведения расчетов без предварительной дискретизации пространства и времени, использования детерминированных, а не вероятностных методов в вычислениях, решения задачи в неограниченной области, получение результатов с гарантированной оценкой погрешности, более высокую эффективность по ресурсам ЭВМ. Полученные теоретические результаты и созданные алгоритмы использованы для численного исследования ряда задач квантовой статистической физики и теории поля.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Method for Numerical Evaluation of Functional Integrals in the Problems of Mathematical Physics

E.P.Zhidkov, Yu.Yu.Lobanov, O.V.Zeinalova, R.R.Shahbagian

This paper contains the results, obtained by the authors within last few years, on theory and methods of numerical evaluation of the integrals in functional spaces. The new approximation formulas of the given degree of accuracy for functional integrals of quantum statistical physics and quantum field theory are constructed. This approach appeared to have advantages over the other existing methods of evaluation of path integrals, e.g., possibility of computations without preliminary discretization of space and time, use of deterministic numerical methods, solution of the problems in an unbounded region. It provides the results with the guaranteed error estimate and gives the significant economy of computer resources. The obtained theoretical results and numerical algorithms have been used for investigations in quantum statistical physics and field theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR

Континуальное интегрирование представляет собой сравнительно новое и бурно развивающееся в последние годы направление в мировой науке. Область применения континуальных интегралов чрезвычайно обширна и продолжает постоянно расширяться. Весьма перспективным является использование континуального интегрирования для численного решения нелинейных задач, стохастических дифференциальных уравнений, задач квантовой статистической физики, теории поля, теории твердого тела, физики ядра, теории вероятностей, математической статистики, квантовой оптики, статистической радиотехники, радиационной физики частиц высоких энергий и др. Континуальное интегрирование — эффективный метод аналитического исследования и численного решения нового класса задач квантовой теории поля, недоступных для других методов. Будучи впервые использованным в квантовой механике Р.Фейнманом (1948), этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах М.Каца (1949). В качестве аппарата исследования метод функционального интегрирования использовался Р.Фейнманом и А.Хибсом при построении квантовой механики. Вопросам использования этого метода при решении целого класса важных задач квантовой физики посвящены многочисленные исследования. Отметим работы Е.Хопфа (1952), Н.Н.Боголюбова (1970), М.Рида и Б.Саймона (1978) и Дж.Глимма и А.Джаффе (1984). Несмотря на все расширяющееся применение континуальных интегралов, соответствующий им математический аппарат разработан еще недостаточно, используемые подходы к континуальным интегралам не всегда являются строгими в математическом смысле. В то же время, как следует из последних публикаций, интерес к математически строгой теории континуальных интегралов и созданию эффективных методов их вычисления, продиктованный потребностями развития науки, в последние годы все возрастает. Отсюда следует актуальность данной темы.

Первые результаты в этой области восходят к работам Н.Винера (1922), Р.Х.Камерона (1951), И.Ф.Гельфанда, А.С.Фролова и Н.Н.Ченцова (1958), В.С.Владимирова (1960), Т.Тобиаса (1966), А.Г.Конхейма и В.Л.Миранкера (1967), Г.С.Финлайнсона (1968) и др. Приближенному вычислению континуальных интегралов по гауссовым мерам посвящены монографии Л.А.Яновича (1976), А.Д.Егорова, П.И.Соболевского и Л.А.Яновича (1985), И.М.Ковальчика и Л.А.Яновича (1989).

В цикле работ, выполненных нами на протяжении ряда лет, получены результаты в области теории континуального интеграла и методов его численного нахождения применительно к задачам квантовой механики, статистической физики и квантовой теории поля на основе математически строго обоснованного детерминированного подхода. По сравнению с другими известными методами вычисления континуальных интегралов данный подход обладает рядом преимуществ. В их числе — более высокая эффективность по ресурсам ЭВМ, возможность использования детерминированных, а не вероятностных методов в вычислениях, получение результатов с гарантированной оценкой погрешности, возможность проведения численных исследований без предварительной дискретизации пространства и времени, благодаря чему не возникает нежелательных эффектов конечной размерности, и др.

Рассмотрим интеграл по гауссовой мере μ, которая наиболее часто встречается в приложениях:

$$\int_X F(x)\, d\mu(x)\,. \tag{1}$$

Здесь $F(x)$ — произвольный вещественный измеримый функционал, X — полное сепарабельное метрическое пространство. Гауссова мера μ на X однозначно задается корреляционным функционалом $K(\xi, \eta)$ и средним значением $M(\xi)$, $\xi, \eta \in X'$ [28].

Нами разработан ряд методов приближенного вычисления континуальных интегралов вида (1), в том числе построены аппроксимационные формулы, точные на классе функциональных многочленов заданной степени.

Пусть H — гильбертово пространство, плотное почти всюду в X, порожденное мерой μ, и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. При выполнении условий на функцию $\rho(r)$: $R \to X$

$$\rho(r) = -\rho(-r), \int_R \langle \xi, \rho(r) \rangle \langle \eta, \rho(r) \rangle\, d\nu(r) = K(\xi, \eta),$$

$$\prod_{i=1}^{j} \langle \xi_i, \rho(r) \rangle \in L(R, \nu), \quad 1 \le j \le 2m+1, \quad \eta, \xi, \xi_i \in X'$$

нами доказана следующая

Теорема 1 [1]. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(e_k, x\right)_H e_k$; $\Psi_n(\mathrm{u}) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k e_k$, $\mathrm{u} \in R^n$; $\rho_m(\mathrm{v}, t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \rho(v_k, t)$, $\mathrm{v} \in R^m$, $\left[c_k^{(m)}\right]^2$ — корни многочлена $Q_m(z) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k z^{m-k}/k!$, $z \in R$. Тогда составная приближенная формула

$$\int_X F(x)\,d\mu(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{u}, \mathrm{u})\right\} \times$$

$$\times \int_{R^m} F\left(\rho^{(m)}(\mathrm{v}) - \rho_n^{(m)}(\mathrm{v}) + \Psi_n(\mathrm{u})\right) d\nu(\mathrm{v})\,d\mathrm{u} + R_n^{(m)}(F), \tag{2}$$

точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m+1$. Здесь $\rho_n^{(m)}(\mathrm{v}) = S_n\left(\rho^{(m)}(\mathrm{v})\right)$ и мера $\nu(\mathrm{v})$ в R^m является декартовым произведением симметричных вероятностных мер ν на R.

Нами также построен аналог приближенной формулы (2) в частном случае условной меры Винера.

В приложениях часто встречаются интегралы от функционалов вида $\exp\{S(x)\}$, где $S = \int_0^T V(x(t))\,dt$. Для континуальных интегралов по условной мере Винера

$$I = \int_C P(x) F(x)\,d_{W^*} x, \text{ где } C = \{C[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$$

с весом

$$P(x) = \exp\left\{\int_0^1 \left[p(t)\,x^2(t) + q(t)\,x(t)\right] dt\right\}, \quad p(t), q(t) \in C[0, 1],$$

получено семейство приближенных формул [2]. Построение этих формул основывается на свойствах найденного и исследованного нами линейного преобразования $y = x + Ax$ [3], где

$$Ax(t) = (1-t)\int_0^t B(s)x(s)\,ds, \quad B(s) \in C[0, 1].$$

Данное преобразование взаимно однозначно отображает пространство C само на себя. Обратное преобразование имеет вид

$$x(t) = \hat{A}y(t) = y(t) - \frac{1-t}{W(t)}\int_0^t B(s)\,W(s)\,y(s)\,ds,$$

$$W(t) = \exp\left\{\int_0^t (1-s)\,B(s)\,ds\right\}.$$

Построенные формулы с весом дают хорошие приближения точного значения интеграла, когда подынтегральный функционал близок к функциональнму многочлену степени $\leq 2m+1$. Более точные результаты для часто встречающихся в приложениях функционалов могут быть получены с использованием приближенных формул типа (2). Комбинируя методы построения приближенных формул, развитые в [1] и [3], мы получаем формулы с весом [4], обладающие достоинствами формул типа (2).

Теорема 2. Пусть $B(s)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-s)\,B'(s) - (1-s)^2 B^2(s) - 3\,B(s) = 2p(s),\ s \in [0, 1],$$

с начальным условием $B(1) = -\dfrac{2}{3}\,p(1)$,

$$\alpha(t) = \int_0^t L(s)\,ds - \frac{1-t}{W(t)} \int_0^t B(s)\,W(s) \left[\int_0^s L(u)\,du\right] ds,$$

$$L(t) = \int_0^t \left[B(s)\,W(s)\,H(s) - q(s)\right] ds + c,\ \ H(t) = \int_t^1 q(s)\,\frac{1-s}{W(s)}\,ds,$$

и константа c определяется из условия $\int_0^1 L(s)\,ds = 0$. Тогда составная приближенная формула

$$I = (2\pi)^{-n/2} \left[W(1)\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 L^2(t)\,dt\right\} \times$$

$$\times \int_{R^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{u}, \mathrm{u})\right\} 2^{-m} \underbrace{\int_{-1}^{1} \ldots \int_{1}^{1}}_{(m)} \Phi\left(\Sigma\left(\rho(v, \cdot)\right)\right) d\,\mathrm{v}\, d\,\mathrm{u} + R_{m,n}(F),$$

где $\Phi(x) = F\left(\hat{A}y + \alpha\right)$, точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m+1$. Здесь $\Sigma(x) = x - S_n(x) + \Psi_n(\mathrm{u})$.

Поскольку реальный мир является многомерным, при решении конкретных прикладных задач приходится вычислять кратные континуальные интегралы. В работах [5—9] мы строим приближенные формулы для интегралов вида

$$\int\limits_X \overset{(m)}{\dots} \int\limits_X F\left(x_1,\dots,x_m\right) d\mu\left(x_1\right)\dots d\mu\left(x_m\right) \equiv \int\limits_{X^m} F(\mathrm{x})\, d\mu^{(m)}(\mathrm{x}),$$

$X^m = X \otimes \dots \otimes X$ — декартово произведение полных сепарабельных метрических пространств X. Одним из способов вычисления таких интегралов является последовательное применение каких-либо приближенных формул для однократных континуальных интегралов. Но, как оказалось, более предпочтительным является использование приближенных формул, обладающих заданной суммарной степенью точности на X^m, т.е. формул, точных для постоянного функционала и функционалов вида

$$F\left(x_1,\dots,x_m\right) = \prod_{i=1}^{m} F_{k_i}\left(x_i\right),$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_m \le 2k + 1$, а F_{k_i} — однородный функциональный многочлен степени k_i по переменной x_i. Примером таких формул является приближенная формула, задаваемая следующей теоремой [5].

Теорема 3. Пусть L — линейный однородный функционал, заданный на множестве интегрируемых по мере μ функционалов и обладающий следующими свойствами:

1. $L\left\{F\right\} = 0$ для любого нечетного функционала $F(\mathrm{x})$;
2. $L\left\{\langle\xi,\cdot\rangle\langle\eta,\cdot\rangle\right\} = K(\xi,\eta)$ для произвольных $\xi,\eta \in X'$;
3. либо $L\left\{\prod\limits_{i=1}^{21}\langle\xi_i,\cdot\rangle\right\} \not\equiv 0$ и $L\{1\} \ne 0$, либо $L\left\{\prod\limits_{i=1}^{21}\langle\xi_i,\cdot\rangle\right\} \equiv 0$,

$\xi_i \ne 0$, $\xi_i \in X'$ и b_i — произвольные положительные числа. Пусть, далее,

$$S_{n_i}\left(x_i\right) = \sum_{j=1}^{n_i}\left(e_j, x_i\right)_H e_j, \quad U_{n_i}\left(\mathbf{u}^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{n_i} u_j^{(i)} e_j, \quad N = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Тогда приближенная формула

$$\int\limits_{X^m} F(\mathrm{x})\, d\mu^{(m)}(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-N/2}\int\limits_{R^N}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{u}^{(i)}\right)\right\}\times$$

$$\times \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{m} b_i L\{1\} \right) F\left(\Sigma_1 \left(x_1 \equiv 0, \mathbf{u}^{(1)} \right), \ldots, \Sigma_m \left(x_m \equiv 0, \mathbf{u}^{(m)} \right) \right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} b_i L_{x_i} \left\{ F \left(\Sigma_1 \left(x_1 \equiv 0, \mathbf{u}^{(1)} \right), \ldots, \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \Sigma_i \left(x_i / \sqrt{b_i}, \mathbf{u}^{(i)} \right), \ldots, \Sigma_m \left(x_m \equiv 0, \mathbf{u}^{(m)} \right) \right) \right\} \right] d\mathbf{u} + R_N(F), \qquad (3)$$

где $\Sigma_i \left(x_i, \mathbf{u}^{(i)} \right) = x_i - S_{n_i}(x_i) + U_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)})$, $d\mathbf{u} = d\mathbf{u}^{(1)} \ldots d\mathbf{u}^{(m)}$, точна для функциональных многочленов третьей суммарной степени на X^m.

В работе [9] построен также аналог формулы (3) для континуального интеграла по условной мере Винера.

Другой частный случай гауссовой меры возникает в двумерной евклидовой теории с полиномиальными взаимодействиями бозонных полей $P(\varphi)_2$, лагранжиан которой записывается следующим образом [29]:

$$L\left(\varphi(\mathrm{x})\right) = : \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\mathrm{x}) + \lambda P\left(\varphi(\mathrm{x})\right) : \qquad \mathrm{x} \in R^2 .$$

В этой модели наблюдаемые значения, определяемые как средние по состоянию вакуума, могут быть найдены путем вычисления следующего континуального интеграла:

$$\langle 0 \mid F(\varphi) \mid 0 \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow \mathrm{R}^2} \frac{\int\limits_{S'(\Lambda)} \exp\left\{ - \int\limits_{\Lambda} : P\left[\varphi(\mathrm{x})\right] : d^2\mathrm{x} \right\} F(\varphi)\, d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}}{\int\limits_{S'(\Lambda)} \exp\left\{ - \int\limits_{\Lambda} : P\left[\varphi(\mathrm{x})\right] : d^2\mathrm{x} \right\} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}} . \qquad (4)$$

Здесь $S'(\Lambda)$ — пространство Шварца обобщенных функций умеренного роста, $\varphi(\mathrm{x}) \in S'(\Lambda)$, P — заданный полином, определяющий тип взаимодействия, $F[\varphi]$ — соответствующий заданной физической величине вещественный функционал, определенный на $S'(\Lambda)$, а $d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}$ — гауссова мера с ковариацией K в пространстве $S'(\Lambda)$ [5]. Существенно, что т.к. перенормировки в $P(\varphi)_2$-модели ограничиваются вычитанием, связанным с упорядочением Вика : :, то в выражении (4) расходимости отсутствуют. Для проведения численных расчетов необходимо иметь явное выражение для ковариационного оператора $K_{\partial \Lambda}$, который может быть записан в виде

$$K_{\partial \Lambda}(f, g) = \int\limits_{R^2 \times R^2} \mathbb{K}_{\partial \Lambda}(x, y) f(x) g(y)\, dx\, dy,$$

где

$$\mathbb{K}_{\partial \Lambda}(x, y) = \int\limits_{S'(R^2)} \varphi(x) \varphi(y)\, d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}, \quad x, y \in R^2.$$

Для интегрального ядра $\mathbb{K}_{\partial \Lambda}$ нами получено следующее представление.

Теорема 4 [10]. Ядро ковариационного оператора $P(\varphi)_2$-меры $\mathbb{K}_{\partial \Lambda}(x, y)$ для произвольной ограниченной связной области $\Lambda \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial \Lambda$ может быть представлено в виде

$$\mathbb{K}_{\partial \Lambda}(x, y) = \sum_n \frac{1}{E_n + m^2}\, \theta_n(x)\, \theta_n(y), \quad x, y \in \Lambda \backslash \partial \Lambda,$$

где E_n и θ_n — собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Delta \theta(x) = E \theta(x), & x \in \Lambda \backslash \partial \Lambda, \\ \theta(x) = 0, & x \in \partial \Lambda. \end{cases}$$

Конкретное выражение $\mathbb{K}_{\partial \Lambda}$ зависит от формы области Λ.

Для приближенного вычисления таких континуальных интегралов по гауссовым мерам в пространстве Шварца обобщенных функций умеренного роста нами были построены и исследованы на конкретных примерах некоторые новые аппроксимационные формулы, точные на классе функциональных многочленов заданной степени [11].

Во всех случаях оценена погрешность, при определенных условиях доказана сходимость к нулю остаточного члена формул, что позволяет получить результат с любой требуемой точностью.

Метод приближенного вычисления континуальных интегралов по гауссовым мерам применяется при численном исследовании (а именно для нахождения методом функции Грина различных квантовомеханических характеристик) ряда моделей квантовой механики, в том числе n-мерного ($n = 1, 2, 3$) гармонического и одномерного ангармонического осциллятора [12—15], модели Калоджеро [16,17] с гамильтонианом

$$H = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 + g \sum_{i<j} (x_i - x_j)^{-2},$$

где ω, g — заданные константы связи, в случае больших размерностей $n = 3, 5, 7, 9, 11$, а также для решения более сложных практических задач (см. ниже).

Сравнение численных результатов вычисления энергии основного состояния и волновой функции с их значениями, полученными зарубежными авторами с помощью других методов, в частности методом Монте-Карло, показало, что построенные в данном цикле работ приближенные формулы обеспечивают экономию счетного времени ЭВМ в 5—10 раз при одинаковой точности вычислений.

Полученные теоретические результаты и созданные алгоритмы использованы для решения ряда задач, в числе которых численное исследование вопросов туннелирования в континууме, вычисление топологического заряда, топологической восприимчивости, исследование границ применимости приближения разреженного инстантонного газа [16,18—20]. Впервые вычислена энергия θ-вакуума в модели квантового маятника без дискретизации пространства-времени [5]. Проведено численное исследование взаимодействия частиц (нуклонов) в ядре атома трития. Данная система описывается уравнением

$$H\Psi \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}_i^2} + \sum_{i<j} V\left(|r_{ij}|\right) \right\} \Psi\left(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \beta\right) =$$

$$= -\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}\left(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \beta\right)$$

$$\Psi\left(\mathrm{X}, \mathrm{X}_0\right) = \delta\left(\mathrm{X} - \mathrm{X}_0\right), \ \Psi\left(\mathrm{X}, \mathrm{X}_0, \beta\right) \to 0 \text{ при } |\mathrm{X}| \to \infty .$$

Здесь через X_i обозначены координаты трех частиц (массой m_i) и

$$r_{ij} = \mathrm{X}_i - \mathrm{X}_j .$$

Достаточно распространенным численным методом решения этой задачи является вариационный метод, который последовательно развивался в многочисленных работах с начала 60-х годов [21—27]. Результатом этих исследований является нахождение верхних и нижних оценок для актуальной энергии, причем за достаточно большие счетные времена (порядка нескольких часов) удавалось достигнуть хорошей точности вычислений. В [21] и [22] для вычисления энергии связи применялся метод Монте-Карло на решетке. В [27] получено значение энергии основного состояния с точностью порядка 0,1 МэВ при расчетном времени в пределах одного часа на ЭВМ CDC-6500.

Нами изучена модель тритона [21]: три идентичные частицы, взаимодействующие попарно посредством сферически-симметричного (спин-независимого) потенциала

$$V(r) = -51{,}5\exp\left\{-\frac{r^2}{b^2}\right\}\ \text{МэВ},\quad b = 1{,}6\ \Phi.$$

В работах, о которых упоминалось выше, для энергии основного состояния тритона были представлены следующие численные значения:

$$E_{mc} = -9{,}77 \pm 0{,}06\ \text{МэВ}\ [27],$$

$$E_v = -9{,}42\ \text{МэВ}\ [21],$$

$$E_v = -9{,}47 \pm 0{,}4\ \text{МэВ}\ [22],$$

$$-9{,}99 \pm 0{,}05\ \text{МэВ} < E_v < -9{,}75 \pm 0{,}04\ \text{МэВ}\ [24],$$

$$E_v = -9{,}78\ \text{МэВ}\ [23{,}25].$$

Значения энергии основного состояния E_0 (МэВ) тритона, вычисленные для различных параметров β с использованием построенных нами приближенных формул с весом представлены в таблице:

β	2,0	3,0	4,0	4,5	4,7	4,8	5,0
E_0	−33,4	−15,2	−10,5	−9,9	−9,8	−9,8	−9,7

Вычисление кратного интеграла Римана проводилось при помощи стандартной процедуры MIKOR, которая реализует кратное интегрирование методом Коробова с относительной погрешностью $\varepsilon = 0{,}01$. Счетное время вычисления энергии для каждого значения β составило порядка 15 мин. на ЭВМ CDC-6500. Из таблицы видно, что результат расчета энергии основного состояния (а таковым следует считать значение E_0, полученное при $\beta = 5$) хорошо согласуется с данными других авторов, при этом счетное время оказалось меньшим по сравнению с временами, приведенными в этих работах.

Литература

1. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Составная приближенная формула произвольного порядка точности для континуальных интегралов по гауссовой мере. ОИЯИ, Р11-83-867, Дубна,1983.
2. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Приближенные формулы с весом для континуальных интегралов по условной мере Винера. ОИЯИ, Р11-84-775, Дубна, 1984.
3. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Об одной линейной замене переменной интегрирования в континуальном интеграле по условной мере Винера. — Краткие сообщения ОИЯИ № 4-84, 1984, с.28—32.
4. Lobanov Yu.Yu., Shakhbagyan R.R., Sidorova O.V., Zhidkov E.P. — Computation of Conditional Wiener Integral by the Composite Approximation Formulas with Weight. J. Comput. Appl. Math., 1990, v.29, pp.51—60.
5. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Об одном методе вычисления континуальных интегралов без решеточной дискретизации. Матем. моделирование, 1989, т.1, № 8, с.139—157.
6. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Вычисление континуальных интегралов квантовой физики с помощью приближенных формул, точных на классе функциональных многочленов. В сб.: Вычислительная физика и мат. модел. Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской конференции, Волгоград, 1988. М.: Изд. УДН, 1989, с.35—44.
7. Lobanov Yu.Yu., Shahbagian R.R., Zhidkov E.P. — Modelling of Multidimensional Quantum Systems by the Numerical Fucntional Integration. JINR, E11-90-393, Dubna, 1990; to appear in: Proc. of the Intern. IMACS Conference «Mathematical Modelling and Applied Mathematics», Moscow, 1990: North-Holland.
8. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Вычисление функции Грина многомерного уравнения Шредингера методом приближенного континуального интегрирования. В сб.: Тезисы докл. 2 Всесоюзной конференции по вычислительной физике и математическому моделированию, Волгоград, 1989: М.: Изд. УДН, 1990, с.39—42.
9. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Приближенное вычисление кратных континуальных интегралов в многомерных задачах квантовой физики. Матем. моделирование, 1990, т.2, № 10, с.110—119.
10. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P. — Covariance Operator of Functional Measure in $P(\varphi)_2$-Quantum Field Theory. JINR,E5-88-659,Dubna, 1988.

11. Lobanov Yu.Yu., Zeinalova O.V., Zhidkov E.P. — Approximation Formulas for Functional Integrals in $P(\varphi)_2$-Quantum Field Theory. JINR, E11-91-352, Dubna, 1991.
12. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Приближенное интегрирование по условной мере Винера в задачах квантовой механики. Гармонический осциллятор. ОИЯИ, Р11-85-764, Дубна, 1985.
13. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Приближенное интегрирование по условной мере Винера в задачах квантовой механики. Ангармонический осциллятор. ОИЯИ, Р11-85-765, Дубна, 1985.
14. Lobanov Yu.Yu., Shahbagian R.R., Zeinalova O.V., Zhidkov E.P. — On Some Algorithms for Computer Evaluation of Functional Integrals. In: Algorithms and Programs for Solution of Some Problems in Physics, v.6, KFKI-1989-62/M, Budapest, 1989, pp.1-28.
15. Gregus M., Lobanov Yu.Yu., Sidorova O.V., Zhidkov E.P. — On the Deterministic Computation of Functional Integrals in Application to Quantum Mechanical Problems. Proc. of the Intern. Congress on Comput. and Appl. Math., Leuven, Belgium, 1986, J. Comput. Appl. Math., 1987, v.20, pp.247—256.
16. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P., Shahbagian R.R. — On Some Method for Computation of Functional Integrals in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. In: 5-th Intern. Symposium on Selected Topics in Stat. Mechanics, Dubna, 1989 — Singapore a.o.: World Scientific, 1990, pp.469—476.
17. Lobanov Yu.Yu., Shahbagian R.R., Zhidkov E.P. — Computation of Green Function of the Schrödinger-Like Partial Differential Equations by the Numerical Functional Integration. JINR, E11-91-353, Dubna, 1991 (Contribution to the Intern. Colloquium on Differential Euqations and Apprications, Budapest, 1991).
18. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P. — Evaluation of Quantum Mechanics Path Integrals by the Approximations Exact on a Class of Polynomial Functionals. JINR, E2-87-507, Dubna, 1987 (Contribution to the Intern. JINR-CERN School of Physics, Varna, Bulgaria, 1987).
19. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. — Расчет топологических эффектов в калибровочных теориях на основе приближенного вычисления винеровских интегралов. Модели квантовой механики. ОИЯИ, Р2-86-433, Дубна, 1986.
20. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. — Метод вычисления континуальных интегралов с помощью аппроксимаций заданного порядка точности в задачах квантовой механики. В сб.: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Тезисы докладов Всесоюзной

конференции, Новосибирск, 1987. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1987, с.79—80.
21. Baker R.A., Gammel J.L., Hill B.J., Wills J.G. — Phys. Rev., 1962, 125, p.1754.
22. Kalos M.H. — Phys. Rev., 1962, 128, p.1791.
23. Herndon R.C., Tang Y.C. — Methods Comp. Phys., 1966, 6, p.153; Nucl. Phys., 1967, A93, p.692.
24. Rosati S., Barbi M. — Phys. Rev., 1966, 147, p.730.
25. Banville M., Kunz P.D. — Can. J. Phys., 1966, 44, p.2095.
26. Homan D.H., Kok L.P. — Nucl. Phys.., 1968, A117, p.231.
27. Grimm R.C., Storer R.G. — J. Comp. Phys., 1971, v.7, No 1, p.134—156.
28. Янович Л.А. — Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976.
29. Глимм Дж., Джаффе А. — Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984.

Рукопись поступила 12 ноября 1992 года.